

01-03 Congruence dans $\mathbb{Z}$

Définition et notation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient deux entiers relatifs a et b .

Si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n , on dit qu'ils sont **congrus modulo n** .

Cela se note $a \equiv b [n]$.

Exemples

$$17 \equiv 12 [5]$$

$$17 \equiv 2 [5]$$

$$-23 \equiv 1 [4]$$

Remarques

Pour un même modulo n , la définition de la congruence implique :

- La **réflexivité** : tout nombre a est congru à lui-même.
- La **symétrie** : si a est congru à b alors b est congru à a .
- La **transitivité** : si a est congru à b et si b est congru à c alors a est congru à c .

Propriété caractéristique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Deux entiers relatifs a et b sont congrus modulo n si et seulement si $(a - b)$ est un multiple de n .

Remarque

Cette propriété entraîne que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$:

- $a \equiv b [n] \Leftrightarrow a + k \equiv b + k [n]$
- $a \equiv b [n] \Rightarrow ka \equiv kb [n]$ La réciproque est vraie dans le cas où k et n sont premiers entre eux.

Propriétés

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient les entiers relatifs a, b, c et d .

Si $a \equiv b [n]$ et $c \equiv d [n]$ alors :

- $a + c \equiv b + d [n]$
- $ac \equiv bd [n]$
- pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a : $a^p \equiv b^p [n]$

01-03 Applications du cours**Application 1**

Compléter les égalités suivantes avec l'entier naturel le plus petit possible.

$$\begin{array}{llll} 37 \equiv \dots\dots [13] & -21 \equiv \dots\dots [8] & 174 \equiv \dots\dots [6] & 53^7 \equiv \dots\dots [4] \\ 19 \equiv \dots\dots [21] & -8 \equiv \dots\dots [7] & 24^3 \equiv \dots\dots [11] & 96^2 \equiv \dots\dots [15] \end{array}$$

Application 2

Déterminer le reste des nombres suivants par la division par 8 :

$$\text{a]} \quad 7^5 \qquad \text{b]} \quad 7^{12} \qquad \text{c]} \quad 7^{5n+2} + 7^{12n+1} - 4$$

Application 3

- a] Démontrer que le nombre $A = 15^5 - 3^5$ est divisible par 12.
- b] Démontrer que le nombre $B = 98^5 + 100^5 + 102^5$ est divisible par 15.
- c] Démontrer que, pour tout entier naturel n , le nombre $C = 3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ est divisible par 13.

Application 4

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

$$\text{a]} \quad x + 8 \equiv 2 \quad [3] \qquad \text{b]} \quad 3x \equiv 7 \quad [8] \qquad \text{c]} \quad (x + 7)(x - 3) \equiv 0 \quad [5]$$

Application 5

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Construire le tableau de congruences des restes de la division euclidienne de $(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ par 5.
2. Quel lien logique y a-t-il entre la divisibilité de n par 5 et la divisibilité de $(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ par 5 ?

Application 6

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer en fonction de n le reste de la division euclidienne de 7^n par 4.
2. Résoudre dans $\mathbb{N}$: $7^{n+1} - (n + 1)7^n - 1 \equiv 0 \quad [4]$.

Application 7

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $P(n) = n^2 + 2n - 3$. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

$$\text{a]} \quad P(n) = 0 \qquad \text{b]} \quad P(n) \equiv 0 \quad [2] \qquad \text{c]} \quad P(n) \equiv 0 \quad [7]$$